	KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ Wydział Mechaniczny POLITECHNIKA LUBELSKA
INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR	
TEMAT	***Badania analityczne układu biomechanicznego o dwóch stopniach swobody na przykładzie .***
OPRACOWAŁ	dr inż. Krzysztof Kęcik

MATERIAŁY CHRONIONE PRAWEM AUTORSKIM

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia są badania analityczne układu biomechanicznego o dwóch stopniach swobody na przykładzie redukcji drgań fotela samochodowego. Głównym celem jest wyznaczenie amplitudy drgań układu podstawowego oraz wytłumienie drgań o częstości rezonansowej za pomocą dynamicznego tłumika drgań (dodatkowego elementu). Ponadto celem jest określenie zakresu częstości wymuszenia, w którym tłumik skutecznie oddziałuje na układ drgający.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Stopień swobody oznacza minimalną liczbę niezależnych zmiennych opisujących jednoznacznie stan (modelu) układu fizycznego. W praktyce stopień swobody określa liczbę niezależnych współrzędnych określających całkowicie położenie danego ciała.
Bardzo często, zmienne siły działające na maszyny lub ich zespoły mogą być przyczyną niebezpiecznych drgań, szczególnie intensywnych w pobliżu rezonansu. W celu uniknięcia niepożądanych drgań należy tak dobierać masę i sztywność elementów, by ich częstości drgań własnych nie pokrywały się z częstościami wymuszenia.
Czasami jednak uniknięcie pracy w pobliżu częstości rezonansowych nie jest możliwe. W tych przypadkach należy stosować eliminatory drgań, których zadaniem jest całkowita eliminacja lub też ograniczenie drgań maszyny w przypadku, gdy pobudzana jest ona z pewną stałą częstością.

Eliminator drgań jest dodatkowym układem dołączonym do układu, którego drgania chcemy zmniejszyć. W zależności od rodzaju sprzężenia obu podukładów możemy wyróżnić rodzaje eliminatorów drgań:

- sztywne połączenie – zmiana masy układu chronionego,
- połączenie sprężysto – dyssypatywne - eliminator dynamiczny,
- połączenie dyssypatywne – eliminator wiskotyczny Newtona,

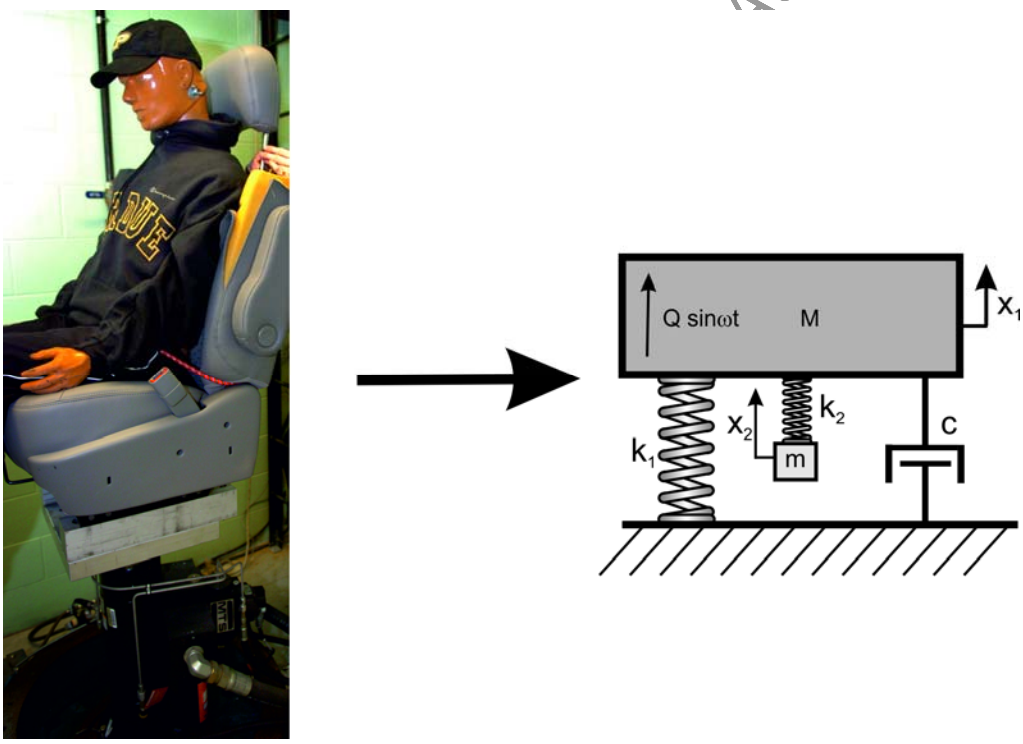
- połączenie cierne – eliminator cierny Lanchaster'a,
- połączenia krótkotrwałe - zderzenia – eliminator uderzeniowy.

Parametry eliminatora dynamicznego należy dobrać tak, aby częstość jego drgań własnych (ω_{0e}) była równa częstości siły wymuszającej (ω).

3. MODEL UKŁADU SIEDZISKA

Rozpatrywany jest model układu biomechanicznego, który składa się z fotela oraz zasiadającego na nim człowieka. W senesie mechaniki składa się z układu podstawowego (ciała materialnego o masie M, która charakteryzuje masę człowieka i fotela) zaczepionego na sprężynie o charakterystyce liniowej (stała k_1) i tłumika wiskotycznego o współczynniku c. Zawieszenie to charakteryzuje rzeczywistą sprężystość zawieszenie układu człowiek-fotel na podwoziu pojazdu. Układ podstawowy jest wymuszany siłą harmoniczną $Q \cdot \sin\omega t$ (jest ona wywoływana drganiami samochodu).

AUTORSKIM



Rys. 1. Układ biomechaniczny siedzenia samochodowego o dwóch stopniach swobody.

Do układu podstawowego doczepiono dodatkowy element (dynamiczny eliminator drgań) o masie m. Stała sprężyny dynamicznego eliminatora wynosi k_2. Równania różniczkowe ruchu masy głównej *M* i masy *m* tłumika dynamicznego maja następująca postać:

$$M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = Q\sin\omega t, \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0. \tag{2}$$

Po kilku przekształceniach matematycznych równania (1) i (2) sprowadzono do postaci:

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = q\sin\omega t, \qquad (3)$$

$$\ddot{x}_2 + rx_2 - rx_1 = 0, \qquad (4)$$

gdzie:

$$2n = \frac{c}{M}, \quad a = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad b = \frac{k_2}{M}, \quad q = \frac{Q}{M}, \quad r = \frac{k_2}{m}. \qquad (5)$$

Równania (3) i (4) należy rozwiązać wstawiając rozwiązania szczególne, które mają postać:

$$x_1 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \qquad (6)$$

$$x_2 = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t), \qquad (7)$$

gdzie A, B, C i D są zakładanymi amplitudami. W rozwiązaniach (6) i (7) pominięto rozwiązanie ogólne, z tego względu, że to rozwiązanie wykładniczo zanika. W równaniach (3) i (4) występują drugie pochodne współrzędnej x_1 i x_2. Należy je wyznaczyć z równań (6) i (7).

Aby otrzymane równania były spełnione w każdej chwili czasu, musza być spełnione równania powstałe przez przyrównanie składników obu stron obu otrzymanych równań, zawierających oddzielnie wyrazy z sin(ωt) i cos(ωt). Inaczej mówiąc: grupujemy człony występujące przy sin(ωt) i cos(ωt) dla pierwszego równania (otrzymujemy 2 równania algebraiczne), oraz człony występujące przy sin(ωt) i cos(ωt) dla drugiego równania:

$$\begin{aligned}
&\sin(\omega t)\left[A(a_{11}) + B(a_{12}) + C(a_{13}) + D(a_{14}) = q\right],\\
&\cos(\omega t)\left[A(a_{21}) + B(a_{22}) + C(a_{23}) + D(a_{24}) = 0\right],\\
&\sin(\omega t)\left[A(a_{31}) + B(a_{32}) + C(a_{33}) + D(a_{34}) = 0\right],\\
&\cos(\omega t)\left[A(a_{41}) + B(a_{42}) + C(a_{43}) + D(a_{44}) = 0\right],
\end{aligned} \qquad (8)$$

gdzie współczynniki a_{11}, a_{12}, …a_{44} są wyrażeniami stojącymi przy amplitudach A, B, C i D.

Aby otrzymane równania algebraiczne (8) były spełnione w każdej chwili czasu, wyrażenia w nawiasach są równe zeru, czyli:

$$\begin{aligned}
&A(a_{11}) + B(a_{12}) + C(a_{13}) + D(a_{14}) = q\\
&A(a_{21}) + B(a_{22}) + C(a_{23}) + D(a_{24}) = 0,\\
&A(a_{31}) + B(a_{32}) + C(a_{33}) + D(a_{34}) = 0,\\
&A(a_{41}) + B(a_{42}) + C(a_{43}) + D(a_{44}) = 0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Do wyznaczenia wartości amplitud przemieszczeń A oraz B oblicza się wyznacznik główny układu (W) równań algebraicznych (9). Wyznacznik **W** wyliczmy z zależności:

MATERIAŁY CHRONIONE PRAWEM AUTORSKIM

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Następnie stosując wzory Cramera oblicza się wyznaczniki (**W_A i W_B**). Wyznaczniki W_A i W_B są to wyznaczniki, w których wstawiono prawą stronę równania (9) w miejsce członów występujących z amplitudami A i B:

$$W_A = \begin{vmatrix} q & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad W_B = \begin{vmatrix} a_{11} & q & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Przy prawidłowych obliczeniach człony: a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{34}, a_{41} i a_{43} powinny wyjść zero.

Amplitudy składowych drgań masy głównej *M* określają wzory:

$$A = \frac{W_A}{W}, \quad B = \frac{W_B}{W}. \tag{12}$$

Należy zaznaczyć, że wiele wyrazów w wyznacznikach (10) i (11) równa się zero,

Amplitudę drgań masy układu głównego otrzymuje się sumując geometrycznie stałe *A* i *B*

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{W_A^2 + W_B^2}}{W}. \tag{13}$$

Kąt przesunięcia fazowego w układzie głównym między wymuszeniem a ruchem masy możemy wyznaczyć z zależności

$$\varphi_1 = \arctan \frac{B}{A}. \tag{14}$$

Częstość drgań własnych układu podstawowego bez doczepionego dynamicznego eliminatora drgań można wyznaczyć z zależności (k_2=0)

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{M} = a'. \tag{15}$$

Natomiast częstość drgań własnych eliminatora wynosi

$$\omega_{0e}^2 = \frac{k_2}{m} = b. \tag{16}$$

Amplitudę drgań wymuszonych układu bez doczepionego eliminatora drgań można wyliczyć z klasycznej zależności:

$$A_0 = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} \tag{17}$$

okreslajacy amplitude drgan układu liniowego o jednym stopniu swobody.

MATERIAŁY CHRONIONE PRAWEM AUTORSKIM

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

W sprawozdaniu przedstawić wyprowadzenie wzorów na amplitudy drgań A_1 i A_0. Dla danych podanych w Tabeli 1, wyznaczyć amplitudy drgań masy układu podstawowego A_1. Wyznaczyć również, amplitudę drgań w przypadku braku dynamicznego tłumika $-A_{0,}$ φ_1, wówczas mamy klasyczny układ o jednym stopniu swobody wymuszonych drgań tłumionych. Obliczenia wykonać dla zadanych częstości wymuszeń z zakresu $0<\omega<3$.

Uwaga: aby analizowane zagadnienie miało sens fizyczny przy wyliczeniu amplitudy A_1 należy przyjąć wartość bezwzględną $|r-\omega^2|$. Wartość ta powinna pojawić się w liczniku końcowej formy na amplitudę A_1. W celu ułatwienia obliczeń można wykorzystać programy Matlab, Mathematica lub MathCad. Zachować wyniki z Tabeli 2, gdyż będą one weryfikowane numerycznie w jednym z następnych ćwiczeń.

MATERIAŁY CHRONIONE PRAWEM AUTORSKIM

Tabela 1. Dane do obliczeń.

	Dane do badań analitycznych				
n	**a**	**a'**	**b**	**r**	**q**
0.125	2	1	1	1	1

Tabela 2. Wyniki badań analitycznych.

A_1	**A_0**	ω	ω_{0e}	$\alpha=\omega/\omega_{0e}$

Sporządzić zależność amplitud układu podstawowego w przypadku dołączonego tłumika drgań (amplituda A_1) i bez tłumika amplituda (A_0) w funkcji stosunku częstości wymuszania do częstości drgań własnych

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_{0e}} . \qquad (18)$$

Na wykresie odszukać obszar korzystnego oddziaływania tłumika.

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Sprawozdanie powinno zawierać następujące informacje:

- oddzielną stronę tytułową;
- temat ćwiczenia;
- cel ćwiczenia;
- opis i schemat układu drgającego;
- równania różniczkowe układu drgającego,
- dokładne wyprowadzenie zależności na amplitudę A_1;
- wyprowadzenie zależności na amplitudę A_0;
- tabelę z danymi;
- tabelę z wynikami obliczeń oraz przykładowe obliczenia;
- nałożyć na siebie wykresy: A_1=f(α) i A_0=f(α);
- zaznaczyć na wykresie obszar korzystnego oddziaływania tłumika;
- wnioski i uwagi;

MATERIAŁY CHRONIONE PRAWEM AUTORSKIM

Bibliografia

1. Szabelski K. Zbiór zadań z drgań mechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2002.
2. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
3. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
4. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódz 1992.
5. Den Hartog: Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa 1971;
6. C. Cempel: Drgania mechaniczne. Wprowadzenie, skrypt PP Nr 1060 1982
7. Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979; Rozdz. 6. Sztuczne tłumienie drgań.