



KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ
Wydział Mechaniczny
POLITECHNIKA LUBELSKA

INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA

TEMAT	<i>Badania numeryczne układu biomechanicznego o dwóch stopniach swobody. Weryfikacja modelu analitycznego.</i>
OPRACOWAŁ	dr inż. Krzysztof Kęćik

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest opracowanie modelu numerycznego oraz symulacje numeryczne układu biomechanicznego o dwóch stopniach swobody na przykładzie dynamicznego eliminatora drgań. Ponadto, celem jest zweryfikowanie wyników analitycznych otrzymanych w poprzednim ćwiczeniu laboratoryjnym.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Współczesny stan nauki i techniki, w tym także mechaniki, trudno jest dzisiaj wyobrazić sobie bez tego, co wniosło pojawienie się komputera oraz metod i technik numerycznych. W mechanice opis analizowanego zjawiska przedstawia się za pomocą równań matematycznych. Są to najczęściej równania różniczkowe zwyczajne lub cząstkowe określone w pewnym obszarze, w którym analizowane zjawisko przebiega. Mówimy, że równania te są *modelem matematycznym* badanego zjawiska. Bardzo często ścisłe analityczne rozwiązanie takiego modelu jest bardzo trudne lub niemożliwe. Jedynym uniwersalnym sposobem rozwiązania jest zastosowanie metod numerycznych. Metody te stanowią jeden z zasadniczych nurtów rozwojowych współczesnej nauki i techniki. Ich stosowanie umożliwia symulację komputerową rzeczywistych zjawisk o różnej naturze fizycznej. Pojęcie słowa *symulacja komputerowa* odnosi do stosowania modeli obliczeniowych w analizie i predykcji procesów mechanicznych lub zachowań systemów technicznych. Zaletą symulacji jest to, że eksperyment można wielokrotnie powtarzać, zmieniając za każdym razem parametry, oraz obserwować i analizować wpływ tych zmian na przebieg zjawiska. Możemy badać zachowanie jeszcze nieistniejących układów lub urządzeń. Symulacja i modelowanie komputerowe reprezentują takie rozszerzenie zakresu nauk teoretycznych, że uzyskanie nowych rezultatów poznawczych bazuje głównie na modelach matematycznych. Takie modele mogą być nawet podstawą teorii naukowych.

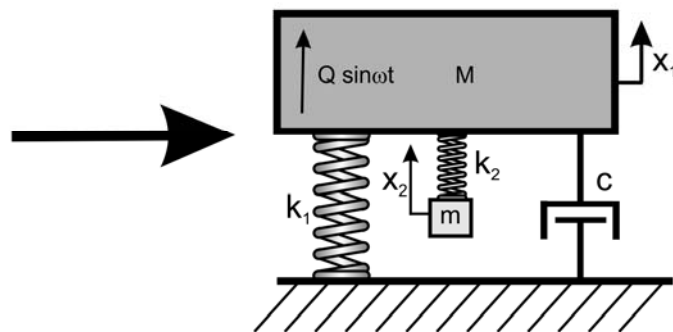
Model numeryczny jest to program komputerowy umożliwiający wprowadzanie parametrów modelowanego układu i stanu początkowego, otrzymanie na drodze obliczeniowej przebiegów czasowych zjawisk i charakterystyk modelowanego układu.

Symulacja numeryczna jest to zastosowanie techniki komputerowej do rozwiązywania problemów dynamicznych modeli systemów.

W nauce, bardzo ważne jest potwierdzenie wyników obliczeń analitycznych innymi metodami takimi jak symulacje komputerowe czy badania eksperymentalne. Dopiero, taki wyniki poparte innymi wynikami można uznać za prawidłowe.

3. MODEL UKŁADU DRGAJĄCEGO

Rozpatrywany jest model układu drgającego składa się z układu podstawowego (ciała materialnego o masie M), zaczepionego na sprężynie o charakterystyce liniowej (stała k_1) i tłumika wiskotycznego o współczynniku c . Układ podstawowy jest wymuszany siłą harmoniczną $Q \cdot \sin \omega t$.



Rys. 1. Układ biomechaniczny o dwóch stopniach swobody.

Do układu podstawowego doczepiono dynamiczny eliminator drgań o masie m . Stała sprężyny dynamicznego eliminatora wynosi k_2 . Równania różniczkowe ruchu masy głównej M i masy m tłumika dynamicznego mają następującą postać:

$$M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = Q \sin \omega t, \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0. \quad (2)$$

Po kilku przekształceniach matematycznych równania (1) i (2) sprowadzono do postaci:

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = q \sin \omega t, \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 + rx_2 - rx_1 = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$2n = \frac{c}{M}, \quad a = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad b = \frac{k_2}{M}, \quad q = \frac{Q}{M}, \quad r = \frac{k_2}{m}. \quad (5)$$

Częstość drgań własnych układu podstawowego bez doczepionego dynamicznego eliminatora drgań można wyznaczyć z zależności

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{M} = a'. \quad (6)$$

Natomiast częstość drgań własnych eliminatora wynosi

$$\omega_{0e}^2 = \frac{k_2}{m} = b. \quad (7)$$

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie to w dużym stopniu bazuje na ćwiczeniu nr 5, gdzie badano ten sam model analitycznie. Dlatego wyniki analityczne z tego ćwiczenia będą wykorzystane i weryfikowane symulacjami numerycznymi.

Do tego celu zostanie wykorzystane środowisko *Matlab* oraz *Simulink*. *Simulink* jest częścią pakietu numerycznego *Matlab* firmy *MathWorks* (www.mathworks.com) i służy do przeprowadzania symulacji komputerowych. Można implementować w nim układy liniowe jak i nieliniowe modelowane zarówno w czasie ciągłym, dyskretnym *Simulink* pozwala budować modele przy pomocy interfejsu graficznego i tzw. bloków. Bloki te są przeznaczone do wykonywania różnych operacji matematycznych (całkowanie, różniczkowanie, mnożenie, itp.). Bloki łączy się w odpowiedni sposób tak aby spełniały zależności matematyczne.

W celu łatwiejszego zaimplementowania równań (3) i (4) przekształcono je do następujących postaci:

$$\ddot{x}_1 = -2n\dot{x}_1 - ax_1 + bx_2 + q \sin \omega t, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 = -rx_2 + rx_1. \quad (9)$$

Parametry układu przedstawiono w Tabeli 1 (parametry układu), natomiast warunki symulacji numerycznej przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 1. Parametry układu.

	Dane do badań numerycznych i analitycznych				
2n	a	a'	b	r	q
0.25	2	1	1	1	1

Sporządzić zależności (wykresy) amplitudy drgań układu podstawowego z eliminatorem w funkcji stosunku częstości wymuszania do częstości drgań własnych (α) (zestawić wyniki analityczne i numeryczne). Wykonać podobny wykresy dla układu bez eliminatora drgań.

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Sprawozdanie powinno zawierać następujące informacje:

- oddzielną stronę tytułową;
- temat ćwiczenia;
- cel ćwiczenia;
- opis i schemat układu drgającego;
- model układu numerycznego (wydruk) wraz z krótkim opisem działania;
- tabelę z danymi (Tabela 1 i Tabela 2);
- tabelę z wynikami symulacji numerycznej (Tabela 3);
- porównanie wyników analitycznych i numerycznych. Dwa wykresy: krzywa rezonansowa z eliminatorem drgań (dwie krzywe: wynik analityczny i numeryczna weryfikacja) oraz krzywa rezonansowa bez eliminatora drgań (dwie krzywe: wynik analityczny i numeryczna weryfikacja);
- wnioski i uwagi;

Bibliografia

1. Szabelski K. Zbiór zadań z drgań mechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2002.
2. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
3. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
4. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
5. Den Hartog: Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa 1971;
6. C. Cempel: Drgania mechaniczne. Wprowadzenie, skrypt PP Nr 1060 1982
7. Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979; Rozdz. 6. Sztuczne tłumienie drgań.