



## INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 13-14

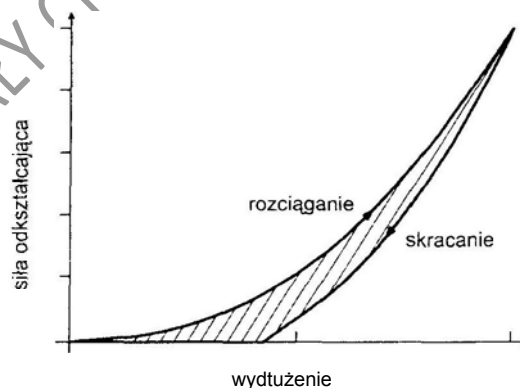
PRZEDMIOT	MODELOWANIE W BIOMECHANICE
TEMAT	Modele reologiczne mięśnia
OPRACOWAŁ	Dr hab. inż. Rafał Rusinek

### 1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji numerycznych modelu z elementem lepko-sprężystym Maxwella i Kelvina-Voigta i porównanie ich zachowania w programie Matlab i Adams.

### 2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Mięsień jest układem wykazującym dość złożone właściwości mechaniczne. Składają się na nie właściwości sprężyste oraz plastyczne, wyrażające się procesami relaksacyjnymi. Zależność siły rozciągającej niepobudzony mięsień wzdłuż jego osi podłużnej od wywołanego tą siłą wydłużenia przedstawia rys1.



Rys. 1 Zależność siły rozciągającej (odkształcającej) mięśnia od wydłużenia

Prawo Hooke'a nie jest w tym przypadku spełnione, moduł Younga nie jest stały i jego wartość rośnie w miarę odkształcania mięśnia. Przy zmniejszaniu siły odkształcającej obserwuje się zjawisko histerezy polegające na tym, że krzywa zależności siły sprężystości od wydłużenia w trakcie rozciągania mięśnia przebiega inaczej niż w trakcie jego swobodnego

kurczenia się. Pole zakreskowane na rysunku jest miarą pracy wykonanej przeciw siłom tarcia wewnętrznego, kosztem której wydziela się ciepło. Przy małych odkształceniach mięsień zachowuje się jak lepka ciecz i odkształca się pod działaniem znikomo małej siły. Dopiero przy większych odkształceniach pojawiają się w mięśniu siły sprężyste, przeciwstawiające się sile odkształcającej. W tym sensie mówi się o lepko-sprężystych właściwościach mięśnia.

Z właściwościami lepko-sprężystymi wiążą się zjawiska relaksacji, które dzieli się na dwa rodzaje:

- relaksację naprężenia - kiedy po nagłym wydłużeniu i dalszym utrzymywaniu stałej długości mięśnia występujące w nim naprężenie maleje z czasem;
- relaksację odkształcenia - gdy przy utrzymywaniu stałej siły odkształcającej długość mięśnia rośnie z czasem; zjawisko to zwane jest również płynięciem bądź pełzaniem.

Zjawiska relaksacji modeluje się za pomocą tzw. modeli reologicznych, które składają się z elementów sprężystych oraz lepkościowych w postaci tłumików wiskotycznych.

Literatura bazuje na dwóch podstawowych modelach reologicznych:

Maxwella i Kelvina-Voigta (Rys.2).



Rys. 2 Model lepko sprężysty Maxwella (a) i Kelvina-Voigta (b)

### Model Maxwella

Zjawisko relaksacji naprężeń opisać można wykorzystując tzw. model Maxwella, który jest szeregowym połączeniem prostego modelu odwzorowującego materiał idealnie sprężysty (sprężyna) o module Younga oraz modelu właściwego materiałom idealnie lepki (tłumik o lepkości  $\eta$ ). Schemat tego modelu przedstawia rys. 2.a. Przy takim typie połączenia naprężenie w obu elementach jest jednakowe, zaś odkształcenie całkowite układu jest sumą

odkształceń sprężyny  $\epsilon_s$  i tłumika  $\epsilon_t$ . Odkształcenie względne sprężyny określone jest wzorem:

$$\epsilon_s = \sigma / E \quad (1)$$

A po zróżniczkowaniu względem czasu otrzymano:

$$\dot{\epsilon}_s = \dot{\sigma} / E \quad (2)$$

Naprężenie w tłumiku wiskotycznym jest proporcjonalne do prędkości odkształcenia, które wyraża się wzorem

$$\dot{\epsilon}_\tau = \dot{\sigma} / \eta \quad (3)$$

Sumując prędkości obu odkształceń otrzymano prędkość całkowitego odkształcenia:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_\tau = \dot{\sigma} / E + \dot{\sigma} / \eta \quad (4)$$

które jest równaniem stanu modelu Maxwella. Przy założeniu stałości odkształcenia otrzymano następujące równanie różniczkowe

$$\dot{\sigma} + \sigma \frac{1}{\lambda} = 0, \quad \text{gdzie } \lambda = \frac{E}{\eta} \quad (5)$$

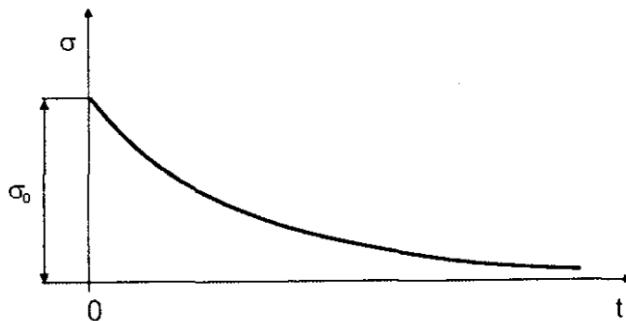
Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (5) jest:

$$\sigma = C e^{-t/\lambda} \quad (6)$$

Przyjmując warunek początkowy  $\sigma(0) = \sigma_0$  rozwiązanie (6) przyjmuje postać:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\lambda} \quad (7)$$

Na tej podstawie wykreślono zależność naprężenia od czasu i przedstawiono na Rys. 3.

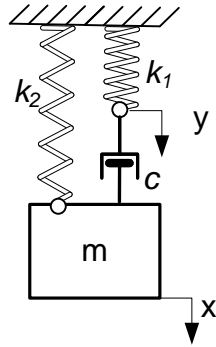


Rys. 3 Naprężenie w funkcji czasu dla model Maxwella

Występuje tutaj **relaksacja naprężeń** gdyż po czasie  $t=\lambda$  naprężenie osiąga wartość:

$$\sigma = \sigma_0 / e \quad (8)$$

Czas  $\lambda$  nosi nazwę czasu relaksacji. Po tym czasie naprężenie maleje  $e$  razy



Rys. 4 Uogólniony model oscylatora z elementem wisko-elastycznym Maxwella

Ze względu na fakt że układy tkankowe (mięśniowe) charakteryzują się właśnie zjawiskiem relaksacji naprężeń model Maxwella jest korzystniejszy od modelu Kelvina-Voigta. Z praktycznego punktu widzenia bardziej popularny jest uogólniony model Maxwella, który zawiera oprócz klasycznego szeregowo połączonych elementu lepko-sprężystym dodatkową sprężynę, której zadaniem jest sprowadzenie tłumika do położenia początkowego. Model oscylatora o jednym stopniu swobody przedstawiono na Rys. 4 oznaczając odkształcenie sprężyny o sztywności  $k_1$  przez  $y$ , zaś przesunięcie klocka o masie  $m$  przez  $x$ . Różniczkowe równania ruchu takiego układu zapisano w postaci równań:

$$\begin{aligned} k_1 y &= c(\dot{x} - \dot{y}) \\ m\ddot{x} &= -k_2 x - c(\dot{x} - \dot{y}) \end{aligned} \quad (9)$$

Pierwsze z nich opisuje równość siły sprężystości i tłumienia w elemencie Maxwella, a drugie jest równaniem drgań oscylatora w którym występują dwie współrzędne. Po przekształceniach otrzymano:

$$\begin{aligned} c\dot{y} &= c\dot{x} - k_1 y \\ m\ddot{x} &= -k_2 x - k_1 y \end{aligned} \quad (10)$$

Równania (10) można rozwiązać numerycznie w programie Matlab-Simulink, co zostanie wykonane w trakcie realizacji ćwiczenia.

## Model Kelvina-Voigta

Drugi z przedstawionych modeli (Rys. 2b) reprezentuje inne zjawisko reologiczne, jakim jest pełzanie. Dwu-elementowy model Kelvina-Voigta jest zbyt prosty by opisać rzeczywiste materiały biologiczne. Dlatego, tak jak to ma miejsce w przypadku modelu Maxwella, do prostego modelu KelvinaVoigta dodaje się kolejne elementy, aż do uzyskania zadowalającej dokładności odwzorowania. Istotą prostego modelu KelvinaVoigta pokazanego na (Rys. 2b) jest równość odkształceń na obu jego elementach (sprężyny i tłumika). Całkowita siła takiego układu stawiana obciążeniu zewnętrznemu jest sumą oporu tłumika ( $F_t$ ) i sprężyny ( $F_s$ ):

$$F = F_t + F_s = c\dot{x} + kx \quad (11)$$

Reologiczne równanie stanu ma postać:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (12)$$

Zakładając, że odkształcenie pozostaje stałe, tzn.  $\varepsilon = \varepsilon_o = const.$ , a więc  $\dot{\varepsilon} = 0$ , otrzymujemy równanie określające naprężenie:

$$\sigma = E\varepsilon_o = const \quad (13)$$

Z równania (13) wynika, że przy stałym odkształceniu naprężenie pozostaje stałe. Tak więc, model Kelvina-Voigta nie wykazuje obserwowanej w ciałach rzeczywistych relaksacji naprężeń.

Przyjmijmy teraz, że stałe jest naprężenie, tzn.  $\sigma = \sigma_o = const.$  Równanie stanu przyjmuje wówczas postać:

$$\eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma_o \quad (14)$$

lub

$$\dot{\varepsilon} + \lambda\varepsilon = \sigma_o / \eta \quad (15)$$

Równanie (15) jest równaniem różniczkowym niejednorodnym. Jego rozwiązanie szczególne przybiera postać:

$$\varepsilon_s = \sigma_o / E \quad (16)$$

zaś, równanie ogólne równania jednorodnego na formę

$$\varepsilon_o = Ce^{-\lambda t} \quad (17)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Całkowane rozwiązanie równania (15) jest sumą rozwiązania ogólnego (17) i szczególnego (16):

$$\varepsilon = Ce^{-\lambda t} + \sigma_o / E \quad (18)$$

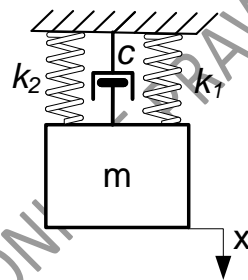
Przyjmując warunek początkowy  $\varepsilon(0) = \varepsilon_o$  otrzymujemy:

$$\varepsilon = (\varepsilon_o - \sigma_o / E)e^{-\lambda t} + \sigma_o / E \quad (19)$$

Wykres równania (19) przedstawiony na charakteryzuje się tym, że odkształcenie z upływem czasu dąży do wartości skończonej. Tak więc w modelu Kelvina-Voigta, przy stałym naprężeniu, mamy do czynienia z **relaksacją odkształcenia**.

W modelu Kelvina-Voigta początkowo całe obciążenie jest przenoszone przez tłumik, zatem szybkość odkształcenia jest maksymalna. W miarę rozciągania sprężyny jej naprężenie wzrasta, obniżając tym samym naprężenie działające na tłumik. Szybkość odkształcenia dąży do zera w miarę jak zbliża się ono do wartości maksymalnej, przy której naprężenie całkowite równe jest naprężeniu sprężyny.

W badaniach numerycznych wykorzystano uogólnioną postać modelu Kelvina-Voigta przedstawioną na Rys. 5, która opisana jest równaniem różniczkowym ruchu w postaci:



Rys. 5 Uogólniony model Kelvina-Voigta

W badaniach numerycznych wykorzystano uogólnioną postać modelu Kelvina-Voigta przedstawioną na Rys. 5, która opisana jest równaniem różniczkowym ruchu w postaci:

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x - c\dot{x} \quad (20)$$

a po przekształceniu:

$$m\ddot{x} + x(k_1 + k_2) + c\dot{x} = 0 \quad (21)$$

Podstawiając  $\omega_o^2 = \frac{(k_1 + k_2)}{m}$ ,  $2n = \frac{c}{m}$  otrzymujemy równanie ruchu drgającego w postaci

$$\ddot{x} + \omega_o^2x + 2n\dot{x} = 0 \quad (22)$$

gdzie,  $\omega_o$  jest częstością drgań własnych.

### 3. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie 13 i 14 składa się z dwóch części. Pierwsza (ćw. 13) wymaga budowy modelu numerycznego w Matlab-Simulink i przeprowadzenie symulacji porównujących działanie modelu Maxwella i Kelvina-Voigta.

Druga część ćwiczenia (ćw. 14) będzie wykonana w programie Adams, w którym zbudowany zostanie model fizyczny zgodnie z Rys. 4 i Rys. 5

Symulacje wykonujemy dla parametrów podanych przez prowadzącego, jednakowych dla obu porównywanych modeli. Symulacja w programie Matlab-Simulink przeprowadzona zostanie na podstawie równań (10) i (21).

### 4. SPRAWOZDANIE

Sprawozdanie z ćwiczenia powinno zawierać:

1. Tabelkę identyfikacyjną
2. Cel ćwiczenia
3. Tabelę danych oraz wyników obliczeń i symulacji
4. Program obliczeniowy (model numeryczny lub fizyczny)
5. Wnioski.

#### Literatura:

1. Szabelski K.: Zbiór zadań z drgań Mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej.
2. Osiński Z.: Teoria drgań. PWN 1980
3. Mrozowski J, Awrejcewicz J.: Podstawy Biomechaniki, Wyd. Politechniki Łódzkiej